④ $A=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|\le 1\}$ kümesinin bağlantılı olduğunu gösteriniz

ÇÖZÜM: A kümesinin yol bağlantılı olduğunu gösterelim. $\forall x,y\in A$ olsun $t\in[0,1]$ olmak üzere $(1-t)x+ty\in A$ dır. Gerçekten;

$\forall x,y\in A$ olduğundan $\|x\|\le 1$ ve $\|y\|\le 1$ olup

$$\begin{aligned}\|(1-t)x+ty\| &\le \|(1-t)x\|+\|ty\| \\ &= |1-t|\,\|x\|+|t|\cdot\|y\| \\ &\le (1-t)+t = 1\end{aligned}$$

olduğundan $(1-t)x+ty\in A$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} f: [0,1] &\longrightarrow A \\ t &\longrightarrow (1-t)x+ty\end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $t=0$ için $f(0)=x$, $t=1$ için $f(1)=y$

ve f, $[0,1]$ den A ya süreklidir. O halde $A\subset\mathbb{R}^n$ yol bağlantılıdır.

A kümesi yol bağlantılı olduğundan bağlantılıdır.

⑤ Aşağıda verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a) $f(x,y)=\ln x+\ln y$ b) $f(x,y)=\sqrt{y-x}$ c) $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

d) $f(x,y)=\sqrt{xy}+\ln(x^2+y^2-1)$

ÇÖZÜM

a) f fonksiyonunun tanım kümesi D olmak üzere ln tanımından $x>0$ ve $y>0$ olmalıdır. Böylece

$D=\{(x,y): x>0,\ y>0\}$ bulunur.

b) f nin tanım kümesi D olsun. $y-x\geq 0 \Rightarrow y\geq x$ olmalıdır. O halde

$$D=\{(x,y):\ x\leq y\}$$

olur.

c) f nin tanım kümesi D olmak üzere $x\geq 0$ ve $y\geq 0$ olmalıdır. O halde

$$D=\{(x,y):\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$$

bulunur.

d) f nin tanım kümesi D olsun. $f_1(x,y)=\sqrt{xy}$ için $xy\geq 0$ olmalıdır. $f_2(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$ fonksiyonu için $x^2+y^2-1>0 \Rightarrow x^2+y^2>1$ olur. $f(x,y)=f_1(x,y)+f_2(x,y)$ olduğundan $D=\{(x,y):\ xy\geq 0,\ x^2+y^2>1\}$ bulunur.

6) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=\arcsin(xy)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM: f nin tanım kümesi T olsun. arcsin fonksiyonunun tanımından $-1\leq xy\leq 1$ olmalıdır.

1) $y\geq 0$ olsun. i) $x>0$ ise $xy\leq 1$ olup $y\leq \frac{1}{x}$ olur.

ii) $x<0$ ise $-1\leq xy$ olup $y\leq -\frac{1}{x}$ olur $(x<0)$

2) $y<0$ olsun. i) $x>0$ ise $-1\leq xy$ olup $y\geq -\frac{1}{x}$

ii) $x<0$ ise $xy\leq 1$ olup $y\geq \frac{1}{x}$

$$T=\{(x,y):\ x>0,\ 0\leq y\leq \tfrac{1}{x}\}\cup\{(x,y):\ x<0,\ 0\leq y\leq -\tfrac{1}{x}\}$$

$$\cup\{(x,y):\ x>0,\ -\tfrac{1}{x}\leq y<0\}\cup\{(x,y):\ x<0,\ \tfrac{1}{x}\leq y<0\}\cup\{0,0\}$$

SORU 1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y^2}{x+y^2}$ limitinin varlığını araştırınız.

Çözüm:

1. YOL. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x-y^2}{x+y^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

$\neq$ $\Rightarrow$ Limit yok.

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-y^2}{x+y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} -1 = -1$

2. YOL. $y = mx$ doğrusu ile yaklaşırsak;

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-m^2x^2}{x+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(1-m^2x)}{\cancel{x}(1+m^2x)} = 1$$

$y=\sqrt{x}$ ile yaklaşırsak;

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-x}{x+x} = 0$$

$0 \neq 1$ olduğundan limit yoktur.

3. YOL. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r^2 = x^2+y^2$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta - r^2\sin^2\theta}{r\cos\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r}(\cos\theta - r\sin^2\theta)}{\cancel{r}(\cos\theta + r\sin^2\theta)} = 1$$

sonuç yok.

SORU 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2}$ limitinin varlığını araştırınız.

Çözüm: **1. YOL.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

$1 \neq 0 \Rightarrow$ Limit yok.

2. YOL. $y=mx$ doğruları ile yaklaşırsak;

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+m^3x^3}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+m^3x}{1+m^2} = \frac{1}{1+m^2}$$

m değiştikçe limit değeri değişir. Bu yüzden limit yok.

3. YOL. $$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} \cos^2\theta + r\sin^3\theta = \cos^2\theta$$

θ değiştikçe limit değeri değişir. Bu nedenle limit yok.

ÖDEV 1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x^2+y}$ (YOK)

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)} y^2+2x^2y+x$ (VAR ve 7)

Soru 3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy+y^3}{x^2+y^2}$ limitinin varlığını araştırınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy+y^3}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xy+y^3}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0.$

Ardışık limitler eşit ve 0 olduğundan eğer limit varsa 0 dır diyoruz.

$y=mx$ doğruları ile yaklaşırsak;

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^2+m^3x^3}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m+m^3x}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

m değiştikçe sonuç değiştiğinden limit yoktur.

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin\theta\cos\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} \sin\theta\cos\theta + r\sin^3\theta$$

$$= \sin\theta\cos\theta$$

θ değiştikçe değişiyor.

Soru 6) $\lim_{(x,y)\to(-2,1)} x+y^3$ limitinin varlığını araştırınız.

Çözüm: $\lim_{x\to -2}\left(\lim_{y\to 1} x+y^3\right) = \lim_{x\to -2} x+1 = -1$

$\lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to -2} x+y^3\right) = \lim_{y\to 1} -2+y^3 = -1$

Limit varsa -1 dir.

$\lim_{(x,y)\to(-2,1)} x+y^3 = -1$ mi? Yani $\forall \varepsilon > 0$ ver.

$0 < \|(x,y)-(-2,1)\| < \delta$ olduğunda $|x+y^3+1| < \varepsilon$ o.ş.

$|x+2| < \delta,\ |y-1| < \delta$

$\delta > 0$ var mı?

$$
\begin{aligned}
|x+y^3+1| &= |x+2+y^3-1| \\
&= |(x+2)+(y-1)(y^2+y+1)| \\
&= |(x+2)+(y-1).((y^2-1)+(y+2))| \\
&= |(x+2)+(y-1).((y-1)(y+1)+(y-1)+3)| \\
&= |(x+2)+(y-1)((y-1).(y-1+2)+(y-1)+3)| \\
&= |(x+2)+(y-1).((y-1).(y-1)+3(y-1)+3)| \\
&\leq |x+2|+|y-1|^3+3|y-1|^2+3|y-1| \\
&< \delta+\delta^3+3\delta^2+3\delta \\
&< \delta+\delta+3\delta+3\delta = 8\delta = \varepsilon \quad \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{8}
\end{aligned}
$$

SORU 7) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x-y}{x+y-z}$ limitinin varlığını araştırınız.

Çözüm: $\left(\frac{1}{n},0,0\right)\to(0,0,0)$

*

$$\frac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}+0-0}=1\to 1$$

$$\left(0,0,\frac{1}{n}\right)\to(0,0,0)$$

$\neq$ Limit yok.

*

$$\frac{0-0}{0+0-\frac{1}{n}}=0\to 0$$

X $\left(\frac{1}{n},0,\frac{1}{n}\right)\to(0,0,0)$

$$\frac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}+0-\frac{1}{n}}=\frac{\frac{1}{n}}{0}=\frac{1}{0.n}=\infty.$$

(*) $\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0,0)$

$$\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}{0-\frac{1}{n}}=\frac{\frac{2}{\cancel{n}}}{-\frac{1}{\cancel{n}}}=-2\to -2 //$$

SORU 9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+2y+xy^2)\left(\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)+\sin^2\left(\frac{1}{|y|}\right)\right)=0$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall \varepsilon>0$ ver. $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$ olduğunda

$\left|(x^2+2y+xy^2)\left(\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)+\sin^2\left(\frac{1}{|y|}\right)\right)-0\right|<\varepsilon$ o.ş. $\delta>0$ var mı?

$|x^2+2y+xy^2|\,\left|\cos\frac{1}{x^2}+\sin^2\frac{1}{|y|}\right|$

$\leq (|x|^2+2|y|+|x|.|y|^2).2$

$< 2\delta^2+4\delta+2\delta^3 < 2\delta+4\delta+2\delta = 8\delta=\varepsilon$

$\delta=\frac{\varepsilon}{3}$.

ÖDEV **15)** $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} (xy) \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Ö

fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ de sürekli midir?

Çözüm: f fonksiyonunun süreksiz olabileceği tek nokta (0,0) dır.

$f(0,0) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{mı?}$$

$\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ olduğunda $|f(x,y)-0| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı var mıdır?

$$\left| xy \, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| = |x| \cdot |y| \cdot \left| \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| < |x| \cdot |y| \cdot 1 < \delta \cdot \delta < \delta = \varepsilon$$

$\delta = \varepsilon$ seçilirse $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$ olur, yani f fonksiyonu (0,0) da süreklidir. f, $\mathbb{R}^2$ de süreklidir.

ÖDEV **16)** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy) + xe^x - y}{x\cos y + \sin 2y}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonu Ö

6

(0,0) da sürekli midir?

Çözüm: $f(0,0) = 1$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$ mi?

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} \frac{\sin(xy) + xe^x - y}{x\cos y + \sin 2y} \right) = \lim_{x\to 0} e^x = 1$$

$$\lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(xy) + xe^x - y}{x\cos y + \sin 2y} \right) = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{\sin 2y} = -\frac{1}{2}$$

$1 \neq -\frac{1}{2}$ olduğundan $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ yoktur. Dolayısıyla f, (0,0) da sürekli olamaz.

Soru: $f: (0,1)\times(0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y^2$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in (0,1)\times(0,1)$ için $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \delta$ olduğunda $|x_1^2y_1^2 - x_2^2y_2^2| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ var mı?

$$
\begin{aligned}
|x_1^2y_1^2 - x_2^2y_2^2| &= |(x_1y_1 - x_2y_2)(x_1y_1 + x_2y_2)| \\
&= |x_1y_1 - x_2y_2| \cdot |x_1y_1 + x_2y_2| \\
&= |x_1y_1 - x_2y_1 + x_2y_1 - x_2y_2| \cdot |x_1y_1 + x_2y_2| \\
&= |(x_1-x_2)\cdot y_1 + x_2(y_1-y_2)|\,|x_1y_1 + x_2y_2| \\
&\le (|x_1-x_2|\cdot|y_1| + |x_2|\cdot|y_1-y_2|)\,(|x_1|\cdot|y_1| + |x_2|\cdot|y_2|) \\
&< (|x_1-x_2|\cdot 1 + 1\cdot|y_1-y_2|)\,(1\cdot 1 + 1\cdot 1) \\
&= 2\cdot(|x_1-x_2| + |y_1-y_2|) \\
&< 2(\delta+\delta) \\
&= 4\delta \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$ //

Soru: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+1} + \arctan y$

fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \delta$ olduğunda $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| < \varepsilon$

olacak şekilde $\delta > 0$ var mı?

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| = \left|\frac{1}{x_1^2+1} + \arctan y_1 - \frac{1}{x_2^2+1} - \arctan y_2\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{x_1^2+1} - \frac{1}{x_2^2+1}\right) + (\arctan y_1 - \arctan y_2)\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{x_1^2+1} - \frac{1}{x_2^2+1}\right| + |\arctan y_1 - \arctan y_2|$$

$$= h'(c_1) \cdot |x_2 - x_1| + k'(c_2) \cdot |y_2 - y_1|$$

$$\leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

$$< \delta + \delta$$

$$= 2\delta$$

$$= \varepsilon$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2} \;//$$

$\rightarrow$ $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ fonksiyonu $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $(x_1 < x_2)$ $[x_1,x_2]$ de sürekli, (x_1,x_2) de türevli olduğundan Ortalama Değer Teoremi gereği

$$\frac{\left|\frac{1}{x_2^2+1} - \frac{1}{x_1^2+1}\right|}{|x_2 - x_1|} = h'(c_1)$$ olacak şekilde $c_1 \in (x_1,x_2)$ var.

$\left(= \dfrac{-2c_1}{(c_1^2+1)^2} \leq 1\right)$

$k(x) = \arctan x$ fonksiyonu $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ için $(y_1 < y_2)$ $[y_1, y_2]$ de sürek(li), (y_1,y_2) de türevli olduğundan Ortalama Değer Teoremi gereği

$$\frac{|\arctan y_2 - \arctan y_1|}{|y_2 - y_1|} = k'(c_2)$$ olacak şekilde $c_2 \in (y_1,y_2)$ var.

$\left(= \dfrac{1}{1+c_2^2} \leq 1\right)$

ÖDEV **8)** $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonu

(0,0) da sürekli midir?

Çözüm: $y = mx$ için

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,mx}{x^2+m^2x^2} = \dfrac{m}{1+m^2}$ olur, m değiştikçe sonuç değiştiğinden (0,0) da limit yoktur. Dolayısıyla f fonksiyonu (0,0) da sürekli değildir.

ÖDEV **9)** $f(x,y) = xy$ fonksiyonunun (1,1) noktasında sürekli olduğunu gösteriniz

Çözüm: $f(1,1) = 1.1 = 1$

$\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\|(x,y)-(1,1)\| < \delta$ olduğunda $|xy-1| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı var mıdır?

$\|(x,y)-(1,1)\| < \delta \Rightarrow |x-1| < \delta, \ |y-1| < \delta$

$$
\begin{aligned}
|xy-1| &= |(x-1)(y-1) + (x-1) + (y-1)| \\
&\leq |x-1|.|y-1| + |x-1| + |y-1| \\
&< \delta^2 + \delta + \delta < \delta + \delta + \delta = 3\delta = \varepsilon
\end{aligned}
$$

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ seçildiğinde $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = 1$ bulunur. Yani f, (1,1)de süreklidir.

ÖDEV **10)** $f(x,y) = x^2+xy+y^2$ fonksiyonunun (1,1) noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(1,1) = 3$

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} x^2+xy+x^2 = 3$ olduğunu göstermeliyiz.

$\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\|(x,y)-(1,1)\| < \delta$ olduğunda $|x^2+xy+x^2-3| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı var mı?

12)

$$|x^2+xy+y^2-3| = |(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2+(-6+3x+3y)|$$
$$= |(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2+3(x-1)+3(y-1)|$$
$$\leq |x-1|^2+|x-1|.|y-1|+|y-1|^2+3|x-1|+3|y-1|$$
$$< \delta^2+\delta^2+\delta^2+3\delta+3\delta$$
$$< \delta+\delta+\delta+6\delta$$
$$= 9\delta = \varepsilon$$

$\delta = \frac{\varepsilon}{9}$ olarak seçilirse $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = 3$ bulunur.

Dolayısıyla $f(x,y)$ fonksiyonu $(1,1)$ noktasında süreklidir.

11-) Vakit kalırsa çöz.

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y^2, & (x,y) \neq (1,1) \\ a, & (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

fonksiyonunun (1,1) noktasında sürekli olması için a ne olmalıdır?

4

Çözüm: $f(1,1) = a$

* Ardışık limitler 2 çıkıyor.
  $y=x$ için de 2 çıkıyor.
  Eğer limit varsa 2 dir.

$\lim_{(x,y)\to(1,1)} x+y^2 = 2$ olduğunu gösterelim.

$\forall \varepsilon>0$ verildiğinde $\|(x,y)-(1,1)\|<\delta$ olduğunda $|x+y^2-2|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı var mı?

$\|(x,y)-(1,1)\|<\delta \Rightarrow |x-1|<\delta, \ |y-1|<\delta$

$$|x+y^2-2| = |x-1+(y-1)^2+2(y-1)|$$
$$\leq |x-1|+|y-1|^2+2|y-1|$$
$$< \delta+\delta^2+2\delta$$
$$< \delta+\delta+2\delta = 4\delta = \varepsilon$$

$\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ alınırsa $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = 2$ bulunur. f fonksiyonunun (1,1) noktasında sürekli olabilmesi için $a=2$ olmalıdır.